TUTORATO GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE, 20/02/25

DOMANDE VARIE

1) In generale TRIANGOLARE (SUP.) $\not\Rightarrow$ DIAGONALIZZABILE

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ← questo è un esempio "tipico" di matrice non diagonalizzabile

- Autovalori di A: 1 con molt. alg. $m_a(1) = 2$.
- A è diagonalizzabile quando $m_a(1) = m_g(1)$, dove

$$m_g(1) = \dim V_1 = \dim(\ker(A - I))$$

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$rk(A-I) = 1 \Rightarrow \dim\ker(A-I) = \underbrace{n}_{2} - 1 = 1$$

$m_g(1) = 1 < 2 = m_a(1)$. Quindi A non è diagonalizzabile.

2) UTILITÀ DEL POLINOMIO MINIMO

Ad esempio: studio della diagonalizzabilità di una matrice (un endomorfismo) che soddisfa un'equazione polinomiale.

Es. 1 Sia $A \in M(n, \mathbb{R})$ tale che $A^2 = A$.

Posto $p(t) = t^2 - t$, si ha $p(A) = 0$.

Ricordiamo che

- Se $q(t)$ è un polinomio t.c. $q(A) = 0$, allora $\underbrace{\varphi_A(t)}_{\text{pol. min.}} \mid q(t)$.
- A è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ $\varphi_A(t)$ NON ha radici multiple. (e ha tutte le radici nel $\underbrace{\text{campo considerato}}_{\text{qui è } \mathbb{R}}$)

Allora abbiamo:

$$\varphi_A(t) \mid t^2 - t = t(t-1) \longrightarrow \varphi_A(t) \in \{ t,\ t-1,\ t(t-1) \}$$

NON HA RADICI MULTIPLE

$\Rightarrow A$ è diagonalizzabile.

<u>Es.2</u> Lo stesso funziona per $A^3 = A$.

Altro fatto importante: $\varphi_A(t)$ ha le <u>stesse</u> radici di $p_A(t)$.

In particolare:

$A \in M(n, \mathbb{R})$

<u>Es.3</u> Se $p_A(t)$ ha n radici distinte, allora A è diagonalizz.

In realtà ciò segue direttamente dalle proprietà degli autovettori. Perché?

Sia $A \in M(n, \mathbb{R})$ con $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ autovalori <u>distinti</u>.

Allora esiste $v_i \neq 0$ autovettore di autovalore λ_i $(i = 1, 2, \dots, n)$

Sappiamo che $v_1, \dots, v_n$ sono lin. indip., quindi formano una base (di autovettori per A) di $\mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} Av_1 &= \lambda_1 v_1 \\ &\vdots \\ Av_n &= \lambda_n v_n \end{aligned} \rightsquigarrow$$

in questa base, A si scrive

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Parentesi (Calcolo delle potenze di una matrice diagonalizz.)

f endomorfismo diagonalizzabile, $A = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f)$ matrice nella base canonica $\mathcal{C}$

Sia $\mathcal{B}$ una base di autovettori per f (per A)

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k \end{pmatrix} \quad \text{diagonale}$$

Se P è la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$

cioè $P = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(id)$

allora $D = P^{-1} A P \quad (\Leftrightarrow A = P D P^{-1})$

Osservando che $A^2 = P D \cancel{P^{-1}} \cancel{P} D P^{-1} = P D^2 P^{-1}$

$\rightsquigarrow$ (facile induzione) $A^n = P D^n P^{-1} \quad (n \in \mathbb{N})$

e $$D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k^n \end{pmatrix}$$

Quindi se conosciamo P è fatta.

P ha nelle colonne gli autovettori di A (scritti nella base canonica)

$$A^n = P \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k^n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

PRODOTTI SCALARI

(Esercizio proposto nel Tutorato del 29/02/24)

Esercizio $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) \longmapsto (-x_1+x_2)y_1 + (x_1+x_3)y_2 + (x_2+x_3)y_3$$

Scrivere in base canonica la matrice di φ, calcolarne la segnatura e determinare un sottospazio isotropo $(*)$ di dim massima

$(*)$ Assumiamo che si intenda un ssp costituito da vettori isotropi

Soluzione

$$M = \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \boxed{1} \end{pmatrix}, \quad \det M = 0 \implies i_0 \geq 1$$

$$\mathrm{Rad}\,\varphi = \ker M, \quad \underbrace{\dim \mathrm{Rad}\,\varphi}_{i_0} = 3 - \overbrace{\mathrm{rk}(M)}^{2} = 1$$

ad es. le prime due colonne sono lin. ind.

Quindi $i_0 = 1$ e abbiamo le seguenti possibilità per la segnatura:

$$(i_+, i_-, i_0) \begin{cases} \boxed{(1,1,1)} \\ (0,2,1) & \times \quad \varphi(e_3,e_3) = 1 \implies i_+ \geq 1 \\ (2,0,1) & \times \quad \varphi(e_1,e_1) = -1 \implies i_- \geq 1 \end{cases}$$

$\varphi(e_2,e_2)=0 \Rightarrow e_2$ è un vettore isotropo

Allora $\mathrm{Span}\{e_2\}$ è un ssp. isotropo di dim. 1.

Possono esserci di dim maggiore?

Supponiamo che esista un ssp isotropo W di dim. 2

Prendiamone una base w_1, w_2. Allora

$$M(\varphi|_W) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ma} \quad w_1+w_2 \in W \text{ è isotropo,}$$

quindi $0 = \varphi(w_1+w_2, w_1+w_2) = 0+0+2\underbrace{\varphi(w_1,w_2)}_{\alpha}$

$\Rightarrow \alpha = 0.$

(Estendendo $\{w_1,w_2\}$ a una base $\{w_1,w_2,v\}$ di $\mathbb{R}^3$ troviamo

$$M_{\{w_1,w_2,v\}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} \varphi(w_1,v) \\ \varphi(w_2,v) \end{matrix} \\ \begin{matrix} \varphi(w_1,v) & \varphi(w_2,v) \end{matrix} & \varphi(v,v) \end{pmatrix} \Bigg)$$

Soluzione rapida: $\mathrm{Rad}\,\varphi = \mathrm{Span}\{v\} \rightsquigarrow$ trovatelo per esercizio!

$e_2 \notin \mathrm{Rad}\,\varphi \qquad (\varphi(e_2,e_1) = 1 \neq 0)$

$\Rightarrow W = \mathrm{Span}\{e_2, v\}$ è un ssp isotropo di dimensione 2

$$\varphi|_W \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e_2 isotropo

$v \in \mathrm{Rad}\,\varphi$

In generale? [Costruire un vettore isotropo $\notin \mathrm{Rad}\,\varphi$]

La nostra matrice M (di partenza) è congruente a

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & \\ & -1 \end{matrix}} & \\ & 0 \end{pmatrix}$$ in una base $v_1, v_2, \underbrace{v_3}_{\text{nel radicale}}$.

Se trovo un vettore isotropo $w_{\neq 0}$ in $\mathrm{Span}\{v_1, v_2\}$, allora $\mathrm{Span}\{w, v_3\}$ è un ssp isotropo (di dim. 2)

infatti: $$\begin{pmatrix} \varphi(w,w) & \varphi(w,v_3) \\ \varphi(w,v_3) & \varphi(v_3,v_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$v_3 \in \mathrm{Rad}\,\varphi$

Consideriamo il caso di:

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \qquad \{v_1, v_2\} \text{ base}$$

guardiamo $v_1 + v_2$:

$$\varphi(v_1+v_2, v_1+v_2) = \varphi(v_1,v_1) + \varphi(v_2,v_2) + 2\varphi(v_1,v_2)$$
$$= 1 - 1 + 0 = 0$$

Quindi $v_1 + v_2$ è isotropo (e non nullo).

$W = \mathrm{Span}\{v_1+v_2, v_3\}$ funziona.

Tornando al nostro caso, osserviamo che

$$M = \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \boxed{1} \end{pmatrix} \qquad \varphi\big|_{\text{Span}\{e_1, e_3\}} \text{ ha matrice associata } \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 0 \\ 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ $e_1 + e_3$ è ISOTROPO

$\text{Rad}\,\varphi = \text{Span}\{v\}$

$$\varphi(e_1+e_3, e_2) = \varphi(e_1, e_2) + \varphi(e_3, e_2) = 1 + 1 = 2 \neq 0$$

Quindi $e_1 + e_3 \notin \text{Rad}\,\varphi$. Allora

$W' = \text{Span}\{e_1+e_3, v\}$ è un ssp isotropo di dim 2.

OSS. La dimensione massima possibile è 2.

Se ci fosse un ssp isotropo di dim 3, sarebbe tutto $\mathbb{R}^3$, che non è isotropo!

OSS. [POST TUTORATO] In effetti, l'insieme dei vettori isotropi è l'unione dei due piani $\underbrace{\{x+z=0\}}_{W}$ e $\underbrace{\{x-2y-z=0\}}_{W'}$.

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \ldots = -x^2 + z^2 + 2xy + 2yz + y^2 - y^2$$
$$= (z+y)^2 - (x-y)^2$$
$$= (x+z)(-x+2y+z)$$

Domanda. esempio di applicazione della procedura di G-S

Esempio con $(\mathbb{R}^3, \langle\, , \,\rangle)$ e base: $\left\{ \underset{u_1}{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}, \underset{u_2}{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}, \underset{u_3}{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}} \right\}$

p s euclideo

$$v_1 = u_1$$

$$v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$v_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle} v_2 - \frac{\langle u_3, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{1}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

OSS. Se φ è degenere, considero una base $v_1, \dots, v_r$ di $\operatorname{Rad}\varphi$ e la estendo a base $v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_s$ di V.

Allora $\varphi\Big|_{\underbrace{\operatorname{Span}\{w_1, \dots, w_s\}}_{W}}$ è non degenere.

Se $w \in \operatorname{Rad}(\varphi|_W)^{\subseteq W}$, allora

$\varphi(w, w_i) = 0$ per ogni $i = 1, \dots, s$

ma anche $\varphi(w, v_j) = 0$ per ogni $j = 1, \dots, r$

$\Rightarrow \varphi(w, v) = 0$ per ogni $v \in V$

$\Rightarrow w \in \operatorname{Rad}\varphi \cap W = \{0\}$.

6) Sia $V = \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Scrivere in base canonica la matrice di un prodotto scalare $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ che sia non degenere ma la cui restrizione al sottospazio delle matrici simmetriche sia invece degenere. Trovare poi una base ortogonale di V rispetto a φ e la segnatura di φ.

Esercizio proposto nel Tutorato del 29/02/24

Richiamo: $V = S_2 \oplus A_2$

dim $4 = 3 + 1$

S_2 ha una base $\{ \underbrace{E_{11}}_{v_1}, \underbrace{E_{22}}_{v_2}, \underbrace{E_{12}+E_{21}}_{v_3} \}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A_2 " " " $\{ \underbrace{E_{12} - E_{21}}_{v_4} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \}$

Una possibile strategia:

Nella base $v_1, \dots, v_4$, φ si scrive come

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \text{degenere} \\ \det = 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} * \\ * \\ * \end{matrix} \\ * \ \ * \ \ * & * \end{pmatrix}}_{\det \neq 0} \in M(4, \mathbb{R}).$$

Una volta trovata una matrice simmetrica di questo tipo, torno alla base canonica:

$$\begin{aligned} E_{11} &\longmapsto E_{11} \\ E_{22} &\longmapsto E_{22} \\ E_{12} &\longmapsto E_{12} + E_{21} \\ E_{21} &\longmapsto E_{12} - E_{21} \end{aligned}$$